DECÁLOGO DEL ÁREA DEL TRIÁNGULO

Javier Jiménez
Instituto Técnico Industrial Piloto. I.E.D.
educacionmtic@gmail.com, javier_jimenez@javeriana.edu.co

El objeto del presente escrito gira en torno a las posibilidades que hay para calcular el área de un triángulo. Cada posibilidad está sujeta a los elementos que se conozcan del triángulo en cuestión y al nivel de complejidad en el que se enmarque. Estos niveles tienen relación directa con la historia de las matemáticas. Aunque se cuenta con diversas estrategias para determinar el área, en la escuela, al parecer, se enfatiza, y por lo tanto se identifica, solo una de ellas.

HISTORIAS Y ESTRATEGIAS PARA DETERMINAR EL ÁREA

Se procura tratar los conceptos conexos con el área del triángulo, señalando los algoritmos que se usan para calcularla; estos obedecen a las estrategias que se adopten y a los elementos geométricos y métricos con los que se cuente.

1. *Por comparación*. Retrocediendo a la antigüedad, uno de los intereses de los griegos fue, por un lado, recopilar los conocimientos de los babilonios y de los egipcios y, por el otro, emplear las matemáticas para describir la naturaleza, empresa que planteó la interpretación racional de los fenómenos naturales y se originó, al parecer, debido a su labor empírico-práctica. Cabe sugerir la lectura de *Euterpe*, el libro II de *Los nueve libros de la historia* escrito por Herodoto, donde en la sección CIX ilustra cómo nació la geometría, tras las conquistas de Sesostris y luego de trazar los fosos y canales para llevar agua a todo Egipto, y del fracasado intento de abrir vías.

Habiéndose originado ya la geometría como actividad empírico práctica, de la cual se valió Sesostris –cuyo reinado transcurrió entre 1971 y 1928 a. de C., y fue relatado por Herodoto, quien vivió aproximadamente entre 490 y 425 a. de C.– aparece Euclides con los *Elementos*, obra escrita alrededor del año 300 a. de C. En la proposición 41 del Libro I, reza: "Si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y está entre las mismas paralelas, el paralelogramo es el doble del triángulo" (Euclides, 1991, p. 252).

Así, $A(P) = 2 \cdot A(T)$

Jiménez, J. (2017). Decálogo del área del triángulo. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 125-130). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Esta relación abre paso a una comparación geométrica, de la cual muy probablemente proviene la ecuación usada, por lo regular, para hallar el área.

2. *Dada la longitud de la base y de la altura correspondiente*. Contemplando la posibilidad que ofrecen las matemáticas empírico prácticas mediante las técnicas empleadas por los agrimensores y también las matemáticas enriquecidas por el razonamiento humano, se plantean una serie de problemas relacionados con la precisión de los instrumentos de medición y la exactitud del dato que proporcionan. En el siglo XI ya se advertía la diferencia entre el trabajo realizado por los agrimensores y el geómetra,

> el monje Gerberto de Aurillac… escribió el primer "artículo científico" de la historia matemática medieval: es una carta al obispo Adalboldo de Utrecht en la que compara la técnica que usan los agrimensores para el área de un triángulo equilátero, que sería equivalente a la formula $1/2 \cdot b(b+1)$, y el método geométrico, que sería equivalente a nuestra fórmula $1/2 \cdot ba$. (Vasco, 1985, p. 24)

Ahora bien, desde un punto de vista geométrico, y como se insinuó antes, se puede considerar como consecuencia de la proposición 41 del Libro I de los *Elementos*, la relación expuesta en dos libros modernos especializados:

> Dado un triángulo con base b y altura correspondiente h, el área está dada por la fórmula $A = 1/2 \cdot bh$. (Clemens, O'Daffer y Cooney, 1998, p. 402)

y

> El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de las medidas de su base y la altura correspondiente. (Cardona, Cardozo, López, Jaramillo y Ramírez, 1996, p. 224)

3. *Dadas las longitudes de los tres lados.* Transitando por el siglo I se encuentra a Herón de Alejandría, matemático, físico e inventor. Diseñó y construyó una serie de automatismos. En cuanto a las matemáticas, retomó los estudios de Arquímedes de Siracusa, quien vivió en el siglo III a. de C., de los cuales extrajo el teorema del área del triángulo en función de los lados. Por fuentes árabes se conoce que:

> […] la "formula" de Herón, procede de Arquímedes. Es la conocida expresión del área de un triángulo en función de sus lados. Como teorema geométrico, probablemente interpolado, aparece en un escrito de Herón denominado *Dioptra*… mientras que bajo la forma de un ejemplo numérico de la aplicación de la "fórmula" aparece en otro escrito denominado *Métrica*… donde utiliza otras contribuciones de Arquímedes. (Rey Pastor y Babini, 1985, p. 96)

Transcribiendo el teorema de la ecuación de Arquímedes-Herón, se tiene:

> Si ΔABC tiene lados de longitud a, b y c, entonces $\boldsymbol{A}\Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, donde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. (Clemens et al., 1998, p. 402)

Detallando la demostración del teorema Arquímedes-Herón se encuentran otras cuatro relaciones geométricas y métricas para determinar el área.

4. *Dadas las dimensiones de dos lados y del ángulo comprendido.* La trigonometría renace durante el siglo XII en Europa como fundamento práctico de la astronomía, de la agrimensura y de la navegación, y quien asume la tarea de sistematizar en cinco libros los conocimientos relacionados con las reglas de los triángulos, con el propósito de facilitar la compresión del Almagesto, es el alemán Johann Müller o Regiomontanus (1436-1476) matemático y astrónomo del siglo XV. Puntualizando, en el libro segundo de los triángulos, se encuentra el teorema 26 que se traduce en términos modernos como: Dados dos lados y el ángulo que forman entre ellos en un triángulo ABC.

> El área del triángulo será igual a la mitad del producto de los dos lados por el seno del ángulo que forman entre ellos; esto es,
>
> $K = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}bc \sin A$. (Ayres y Moyer, 1991, p. 159)

5. *Dadas las dimensiones de un lado y de los ángulos interiores*. Como consecuencia de la estrategia anterior y reescribiendo el área de un triángulo fundamentada en la ley de los senos, se tiene que:

> el área del triángulo será igual al producto del cuadrado de uno de los lados, por el seno de cada uno de los ángulos adyacentes a dicho lado, entre el doble producto del seno del ángulo opuesto a dicho lado; esto es,
>
> $K = \frac{a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} A} = \frac{b^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} B} = \frac{c^2 A \operatorname{sen} B}{2 \operatorname{sen} C}$. (Ayres y Moyer, 1991, p. 159)

Regiomontanus enuncia la *ley de los senos* en el teorema I del segundo libro de su obra *De Triangulis Omnimodis*.

6. *Dadas las coordenadas de los vértices*. La geometría analítica fue introducida en 1636 por Pierre de Fermat en su obra *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge – Introducción a los lugares planos y sólidos*, quien no la publicó, y un año después, de manera independiente, fue publicada como apéndice de su

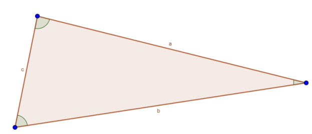
gran sistema filosófico por René Descartes, denominado *La Géométrie*. Ahora bien, "tomados en conjunto, contenido en Fermat y notación y terminología en Descartes, tenemos el texto de geometría analítica de nuestros textos de enseñanza secundaria" (Sestier, 2000, p. 92).

Desde la perspectiva de la geometría analítica se puede citar la estrategia siguiente para calcular el área de un triángulo conociendo las coordenadas de los vértices:

> Sean $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ los vértices de un triángulo. El área A en función de las coordenadas de los vértices viene dada por la expresión: $A = \frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_3y_2-x_2y_1-x_1y_3)$. (Kindle, 1981, p.3)

7. *Dadas las funciones de las tres rectas que contienen los lados*. Si los lados a, b y c están contenidos respectivamente en las rectas $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$, empleando el cálculo integral, el área del triángulo se puede expresar del siguiente modo:

$$A = \int g(x)dx + \int f(x)dx - \int h(x)dx$$



Esta estrategia es resultado del cálculo infinitesimal. Aunque son numerosos los precursores, es a Isaac Newton y a Gottfried Leibnitz a quienes puede adjudicárseles la creación de las derivadas y de las integrales.

> Newton empezó a pensar en el cálculo infinitesimal en 1665, pero no publicó nada hasta 1687. Leibnitz, cuyas ideas seguían líneas bastante similares a las de Newton, había empezado a trabajar en el cálculo infinitesimal en 1673 y publicó sus primeros artículos en 1684. (Stewart, 2007, p. 130)

Este episodio originó una serie de acusaciones de plagio, desencadenando disputas entre los matemáticos ingleses y alemanes.

8. *Dada la cantidad de puntos en una retícula*. El teorema de Pick nos da una relación exacta entre el interior de un polígono sobre un reticulado (una figura que no se corta a sí misma y cuyos vértices son siempre puntos del reticulado) y el número de puntos del reticulado que pertenecen a la línea poligonal.

> Supongamos que hay $I(P)$ puntos del reticulado en el interior de P y $B(P)$ puntos del reticulado sobre la frontera de P. Entonces, el área $A(P)$ de P viene dada por: $A(P) = I(P) + \frac{1}{2}B(P) - 1$. (Skiena y Revilla, 2012, p. 314)

Esta relación es atribuida a George Pick, como lo señala Crilly (2011):

> El matemático austríaco Georg Pick es famoso por dos cosas. Una es haber sido amigo cercano de Albert Einstein y haber contribuido a llevar al joven científico para la Universidad Alemana en Praga en 1911. La otra es haber escrito un corto artículo, publicado en 1899, sobre geometría "reticular". Entre todo el trabajo de una larga vida, cubriendo un vasto abanico de temas, es recordado por el interesante teorema de Pick – y ¡qué teorema! (p. 113)

9. *Empleando la retícula de los ejes coordenados*. Este método, empírico práctico, proporciona un valor aproximado: La medida interior es el número de cuadrados encerrados por la figura. La medida exterior es el número de cuadrados encerrados por la figura y que contienen parte de dicha figura (Cárdenas, 2000). El procedimiento para estimar el área de una figura equivale a fijar la medida interior M_i, la medida exterior M_e, y calcular el promedio de dichas medidas $A = \frac{M_i + M_e}{2}$.

10. *Empleando vectores*. El análisis vectorial inicia en 1837 con Hamilton y en 1844 con Hermann Günther Grau, luego renace a partir de 1881 con Josiah Willard Gibbs, Oliver Heaviside, Edwin Bidwell Wilson, Alfred Heinrich Bucherer, Eugen Jahnke y Siegfried Valentiener. En estos estudios se encuentra que: "El área del triángulo que tiene por lados A y B es igual a $\frac{1}{2}|A \times B|$" (Spiegel, 1969, p. 24).

Finalmente, recurriendo a las herramientas digitales, dentro del sinnúmero de portales Web se encuentran calculadoras en línea tales como:

1. Online calculadora. Área de un triángulo mediante 9 métodos: http://es.onlinemschool.com/math/assistance/figures_area/triangle/

2. Online calculadora. Área de triángulo construido sobre vectores: http://es.onlinemschool.com/math/assistance/vector/triangle_area/

PARA FINALIZAR

Invito a los docentes a recurrir a la historia de las matemáticas con el fin de contextualizar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares, a examinar las posibles estrategias de solución de un problema o situación, y a alcanzar competencias en Tecnologías de la Información y la Comunicación, haciendo énfasis en la argumentación en el ámbito matemático y no en el uso instrumental de este tipo de recursos. También, a acceder a la constitución o a la adhesión a redes educativas con el objeto de apoyar un trabajo colaborativo en procura de una formación permanente.

REFERENCIAS

Ayres Jr. F. y Moyer, R. (1991). *Trigonometría* (segunda edición). México D.F., México: McGraw Hill.

Cárdenas, R. (Ed.). (2000). *Matemáticas: Aplicaciones y conexiones 7*. Bogotá, Colombia: McGraw Hill.

Cardona, O., Cardozo, C., López, G., Jaramillo, R. y Ramírez, E. (1996). *Geometría básica.* Medellín, Colombia: Universidad Pontificia Bolivariana.

Clemens, S., O'Daffer, P. y Cooney, T. (1998). *Geometría* (Manuel López, Tr.). Naucalpan de Juárez, México: Addison Wesley Longman de México, S.A. de C.V. Pearson educación.

Crilly, T. (2011). *50 ideias de matemática que precisa mesmo de saber* (Jorge Nuno Silva, Tr.). Alfragide, Portugal: Publicações D. Quixote.

Euclides (1991-1996, trad.). *Elementos* (María Luisa Puertas, Tr.; con Introducción de Luis Vega Reñón). Madrid, España: Gredos.

Herodoto, H. (2006, trad.). *Los nueve libros de la historia* (Bartolomé Pou, Tr.). eBooksBrasil. Edición elaleph.com. Obtenido de: www.gnu.org/copyleft/fdl.html (2017, enero 20).

Kindle, J. (1981). *Teoría y problemas de geometría analítica plana y del espacio.* Atizapán de Zaragoza, México: McGraw Hill.

Rey Pastor, J. y Babini, J. (1985). *Historia de la matemática: De la antigüedad a la edad media* (vol. 1). Barcelona, España: Gedisa.

Sestier, A. (2000). *Historia de las matemáticas.* México D.F., México: Editorial LIMUSA.

Skiena, S. y Revilla, M. (2012). *Desafíos de programación: el manual del entrenamiento para concursos de programación.* New York, EUA: Lulu Enterprises, Inc. Obtenido de: http://www.lulu.com (2017, enero 22).

Spiegel, M. (1969). *Análisis vectorial y una introducción al análisis tensorial.* Bogotá, Colombia: McGraw Hill.

Stewart, I. (2007). *Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años.* Barcelona, España: Crítica.

Vasco, C. E. (1985). *El álgebra renacentista* (segunda edición). Bogotá, Colombia: Empresa Editorial Universidad Nacional de Colombia.